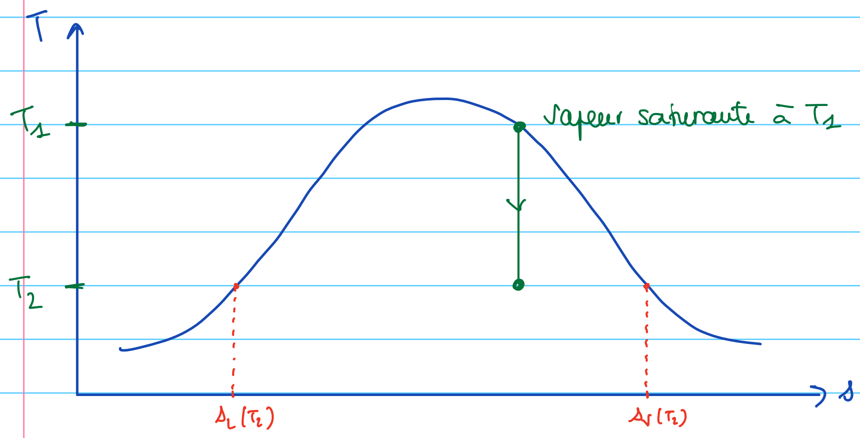
Séance 2
Thermodynamique

T.1 - Détente dans une turbine



- La détente est supposée adiabatique réversible : elle est donc isentropique et sera donc une droite verticale dans le diagramme (T, s).

- À l'état final, on a $s_2 = s_1$ (car transformation isentropique)
  $s_2 = s_V(T_1)$ (car état 1 = vapeur saturante à T_1)

On applique le théorème des moments : $x_V = \dfrac{s_2 - s_L(T_2)}{s_V(T_2) - s_L(T_2)} = \dfrac{6{,}35 - 2{,}45}{7{,}36 - 2{,}45} = \underline{0{,}8}$.

- Appliquons le 1er principe industriel au fluide traversant la turbine en négligeant les variations d'énergie mécanique :

$h_2 - h_1 = w + q$ avec w le travail massique reçu par le fluide (convention thermo)
q le transfert thermique reçu par le fluide. Nul ici car la transformation est adiabatique.

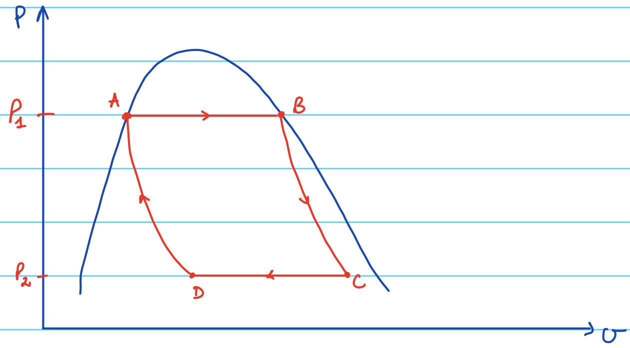
Donc $w = h_2 - h_1$
$= x\, h_V(T_2) + (1-x)\, h_L(T_2) - h_V(T_1)$
$= 0{,}8 \times 2676 + 0{,}2 \times 418 - 2801$
$w = -576 \text{ kJ.kg}^{-1}$

Ainsi, le travail fourni par le fluide dans la turbine est $-w = +576 \text{ kJ.kg}^{-1}$

à commenter : >0 logique dans une turbine.

T2 - Cycle de Rankine

1)



Le cycle est parcouru dans le sens horaire
il s'agit donc d'un moteur.

2) On a par le théorème des moments : $x_{VD} = \dfrac{s_D - s_L(T_2)}{s_V(T_2) - s_L(T_2)} = \dfrac{s_A - s_L(T_2)}{s_V(T_2) - s_L(T_2)} = \underline{0,29}$

Pour calculer x_{VC}, on a besoin de $s_C = s_B$

Par ailleurs, on sait que $s_B - s_A = \Delta_{vap} s = \dfrac{\Delta_{vap} h}{T_1} = \dfrac{h_B - h_A}{T_1}$

Donc $s_B = s_A + \dfrac{h_B - h_A}{T_1} = 2,8 + \dfrac{2796 - 1083}{250+273} = \underline{6,1 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}}$

On a donc $x_{VC} = \dfrac{s_B - s_L(T_2)}{s_V(T_2) - s_L(T_2)} = \underline{0,72}$

3) On a $w = w_{BC} + w_{DA}$. (en général les étapes isobares/isotherme sont le lieu de contact avec les sources ⇒ pas de travail utile)

Appliquons le 1° principe industriel entre B et C. (en négligeant les variations d'énergie méca)

$$h_C - h_B = w_{BC}$$

$$x_{VC}\, h_V(T_2) + (1 - x_{VC})\, h_L(T_2) - h_B = w_{BC}$$

et on a $\dfrac{h_V(T_2) - h_L(T_2)}{T_2} = s_V(T_2) - s_L(T_2)$ donc $h_V(T_2) = \left(s_V(T_2) - s_L(T_2)\right) T_2 + h_L(T_2)$.

De même $w_{DA} = h_A - x_{VD}\, h_V(T_2) - (1 - x_{VD})\, h_L(T_2)$.

fourni par l'eau

Au final, $w_{tot} = -w_{BC} - w_{DA} = \underline{672 \text{ kJ.kg}^{-1}}$ (>0 car moteur ⇒ travail effectivement fourni)

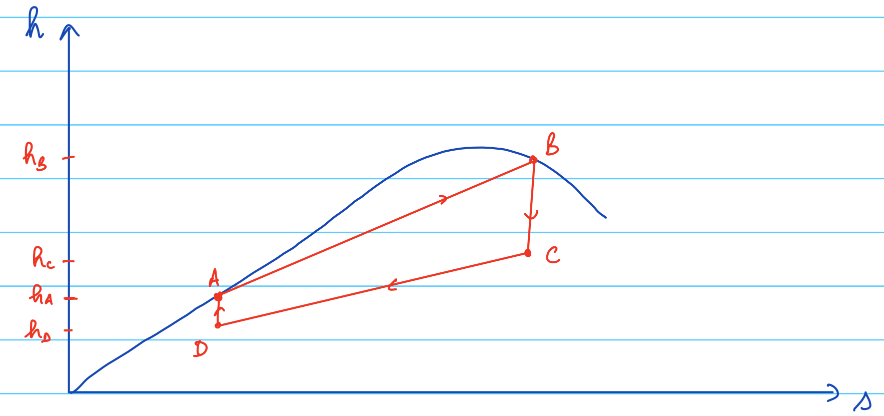
Le contact avec la source chaude est sur étape AB. On applique le 1° principe industriel à l'étape :

$$h_B - h_A = q_2 = \underline{1713 \text{ kJ.kg}^{-1}}$$

4) On peut définir le rendement $\eta = \dfrac{w_{tot}}{q_2} = \underline{0,4}$

5) Le diagramme de Mollier relie h (en ordonnées) à s (en abscisses) pour un corps pur. On lit facilement les variations d'enthalpies qui donnent par le 1e principe industriel les échanges w et q_2.

6)



T3. Fluctuation de température dans une cave

1) $\vec{j} = -\lambda \, \overrightarrow{\text{grad}}\, T$ $\quad$ $\vec{j}$ le vecteur densité de courant thermique
λ la conductivité du matériau
T la température

2) Cours : on isole une tranche entre z et $z+dz$, de section S
On lui applique le 1er principe entre t et $t+dt$

$$dU = \delta Q \qquad (dE_m = 0 \text{ et } \delta W = 0 \text{ car le système est immobile indéformable})$$

On a $dU = C\left(T(z,t+dt) - T(z,t)\right) = \rho S dz\, c \dfrac{\partial T}{\partial t} dt$

Par ailleurs $\delta Q = \left(\oint \vec{j}\cdot d\vec{S}\right) dt$ $\quad$ $d\vec{S}$ entrant

comme $\vec{j} = -\lambda \, \overrightarrow{\text{grad}}\, T = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial z} \vec{u_z}$, on a :

$$\delta Q = \left(\iint j(z,t)\, \vec{u_z} \cdot dS\, \vec{u_z} + \iint j(z+dz,t)\, \vec{u_z} \cdot dS(-\vec{u_z})\right) dt$$

$$= -S \frac{\partial j}{\partial z} dz dt = S\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dz\, dt$$

Au final $\quad \rho \cancel{S} \cancel{dz}\, c \dfrac{\partial T}{\partial t} \cancel{dt} = \cancel{S} \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} \cancel{dz}\cancel{dt}$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\frac{\lambda}{\rho c}}_{=D} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}} \qquad (1)$$

3) Posons $\Theta(z,t) = T(z,t) - T_0 = \theta(z) \cos(\omega t + \varphi(z))$

On peut passer Θ dans le domaine complexe : $\underline{\Theta} = \theta(z)\, e^{j(\omega t + \varphi(z))} = \underbrace{\theta(z) e^{j\varphi(z)}}_{\underline{\Theta}_0(z)} e^{j\omega t}$

Dans (1), on obtient $j\omega \underline{\Theta}_0(z) = D\, \underline{\Theta}_0''(z)$

$$\underline{\Theta}_0''(z) - \frac{j\omega}{D} \underline{\Theta}_0(z) = 0$$

On résout l'équation caractéristique : $r^2 - j\dfrac{\omega}{D} = 0$ ie $r^2 = j\dfrac{\omega}{D}$

Si $r = Re^{j\alpha}$, on a $\quad R^2 e^{2j\alpha} = j\dfrac{\omega}{D} = \dfrac{\omega}{D} e^{j\pi/2}$

Donc $R_1 = \sqrt{\dfrac{\omega}{D}}$ ou $R_2 = -\sqrt{\dfrac{\omega}{D}}$ et $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

Au final $\quad r = \pm\sqrt{\dfrac{\omega}{D}} \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+j) = \pm\sqrt{\dfrac{\omega}{2D}}(1+j)$

et $\underline{\Theta}_0(z) = A \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+j)z\right) + B\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+j)z\right)$

On ne veut pas que la température diverge quand $z \to \infty$, donc $A=0$

et $B = \underline{\Theta}_0(z=0) = \theta_0$

Donc $\underline{\Theta}_0(z) = \theta_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+j)z\right)$

ie $\underline{\Theta} = \theta_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+j)z\right)e^{j\omega t} = \theta_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+j)z + j\omega t\right)$

et enfin $\boxed{T(z,t) = T_0 + \theta_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}\cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}z\right)}$

4) On veut $\theta_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z_c} = 2$ avec $\theta_0 = 10$.

Donc $-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z_c = \ln\left(\frac{2}{\theta_0}\right)$

$z_c = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho c\,\omega}}\ln\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}\ln\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$

La période des variations saisonnières est 1 an, donc $\omega = \frac{2\pi}{1\times365\times3600\times24}$

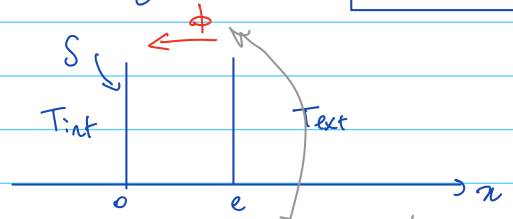
et $\underline{z_c = 2{,}7\text{ m}}$

T4 - Isolation d'un cabanon

1) Cours D_{th} est le coefficient de diffusion thermique.

On a $\dfrac{\Theta}{T} = [D_{th}] \times \dfrac{\Theta}{L^2}$ Donc $\boxed{[D_{th}] = L^2 . T^{-1}}$ exprimé en $m^2.s^{-1}$

2) Cours



à commenter

On a en régime stationnaire $\dfrac{d^2T}{dx^2} = 0$ ie $T(x) = Ax + B$

on a $T(x=0) = T_{int}$
$T(x=e) = T_{ext}$ donc $\boxed{T(x) = T_{int} + \dfrac{T_{ext} - T_{int}}{e} x}$

On a par ailleurs, avec la convention choisie : $T_{ext} - T_{int} = R_{th} \, \phi$

et $\phi = \iint \vec{j}_{th} \cdot dS \, (-\vec{u_x}) = \lambda S \dfrac{dT}{dx} = \lambda S \dfrac{T_{ext} - T_{int}}{e}$

$\vec{j}_{th} = -\lambda \dfrac{dT}{dx} \vec{u_x}$

Ainsi $\boxed{R_{th} = \dfrac{e}{\lambda S}}$

3) Si la température évolue lentement, on peut considérer qu'on est dans l'ARQS et que $T_{ext} - T_{int}(t) = R_{th} \, \phi$

Appliquons le 1° principe de la thermodynamique à l'air dans le cabanon entre t et $t + dt$:

$$dU = \delta Q$$

éventuellement $L\ell h \times \rho_{air} \times c_{air}$

avec $dU = C_{air} \left(T_{int}(t+dt) - T_{int}(t) \right) = C_{air} \dfrac{\partial T_{int}}{\partial t} dt$

(chaud) $= 0$

$\delta Q = \sum \Phi_{entrant} \, dt = \phi_{mur\,1} \, dt + \phi_{mur\,2} \, dt + \phi_{mur\,3} + \phi_{mur\,4} \, dt + \phi_{toit} \, dt + \phi_{sol} \, dt$

$$= \underbrace{\left(2 \times \frac{\lambda L \times h}{e} + 2 \times \frac{\lambda \ell \times h}{e} + \frac{\lambda L \times \ell}{e} \right)}_{1/R_{tot}} dt \, (T_{ext} - T_{int}(t))$$

il y a 2 murs de dim° $L \times h$

Au final $\quad C_{air} \dfrac{\partial T_{int}}{\partial t} = \dfrac{1}{R_{tot}} \left(T_{ext} - T_{int}(t) \right)$

ie $\quad \dfrac{\partial T_{int}}{\partial t} + \dfrac{1}{R_{tot} C_{air}} T_{int} = \dfrac{1}{R_{tot} C_{air}} T_{ext}$.

Donc $\quad \boxed{T_{int}(t) = \left(T_0 - T_{ext} \right) e^{-t/R_{tot} C_{air}} + T_{ext}}$

On cherche t_1 tq $T_{int}(t_1) = T_1$

Donc $\quad \left(T_0 - T_{ext} \right) e^{-t_1/\tau} + T_{ext} = T_1 \qquad \tau = R_{tot} C_{air}$

ie $\quad \boxed{t_1 = \tau \ln \left(\dfrac{T_0 - T_{ext}}{T_1 - T_{ext}} \right)}$

4) On a maintenant $R'_{tot} = R_{tot} + R_{iso}$ car l'isolant est en série du mur (traversé par le même flux)

$$= \frac{e}{\lambda_{bois} (2LR + 2\ell R + L\ell)} + \frac{e'}{\lambda_{laine} (2LR + 2\ell R + L\ell)}$$

$$t_2 = \tau' \ln \left(\frac{T_0 - T_{ext}}{T_1 - T_{ext}} \right) = R'_{tot} C_{air} \ln \left(\frac{T_0 - T_{ext}}{T_1 - T_{ext}} \right)$$

A priori $t_2 > t_1$ car le cabanon est alors mieux isolé et $R'_{tot} > R_{tot}$