Epreuve de Physique A

Durée 4h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Tournez la page S.V.P

Données :

- ▷ Charge élémentaire $e = 1,6.10^{-19}$ C
- ▷ Permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 9.10^{-12}$ F.m^{-1}
- ▷ Perméabilité diélectrique du vide $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}
- ▷ Gradient en sphérique : $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \dfrac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$

I - La foudre

Préambule

L'électrosphère est une couche atmosphérique ionisée. L'électrosphère et la Terre, de rayon $R_T = 6400$ km, forment un gigantesque condensateur terrestre (figure 1), où le champ électrique par beau temps est dirigé de l'électrosphère vers la Terre et atteint environ 100 à 120 V.m^{-1}.

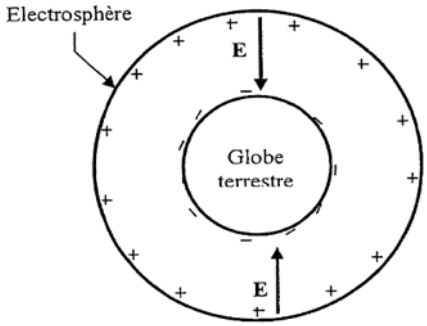

Figure 1 - Terre et électrosphère

Les armatures de ce condensateur sont l'électrosphère et le globe terrestre, entre lesquelles il y a la troposphère et la stratosphère qui constituent le diélectrique (isolant), dont l'épaisseur est d'environ 80 km.

L'air comprend en permanence des charges électriques, positives et négatives, créées par les rayonnements cosmiques ou la radioactivité de la Terre. Par beau temps, il en résulte un courant atmosphérique de densité volumique $\overrightarrow{j}$ tendant à décharger le condensateur.

Suite aux perturbations atmosphériques et sous certaines conditions, il se forme des nuages orageux en général du type cumulo-nimbus (figure 2) de couleur sombre. Ils constituent une gigantesque machine thermique dont la base et le sommet sont respectivement à environ 2 km et 15 km d'altitude. Sa constitution est rendue possible par l'élévation d'air chaud par des courants ascendants dont la vitesse est de quelques mètres par seconde. Lors de son ascension, cette masse d'air se charge en humidité jusqu'à devenir un nuage. La partie supérieure, où il fait froid, est occupée par les particules de glace, tandis que les gouttes d'eau s'établissent dans la partie inférieure.

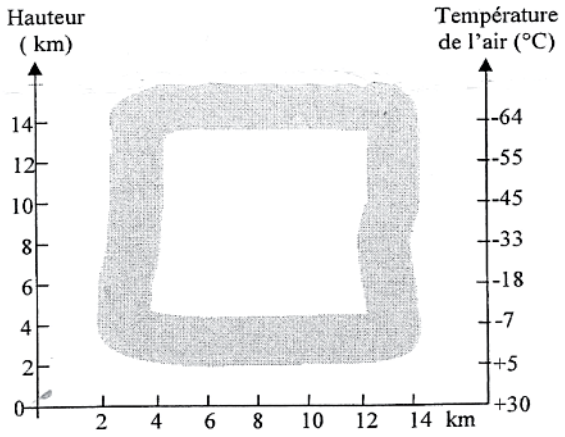

Figure 2 - Cumulo-nimbus

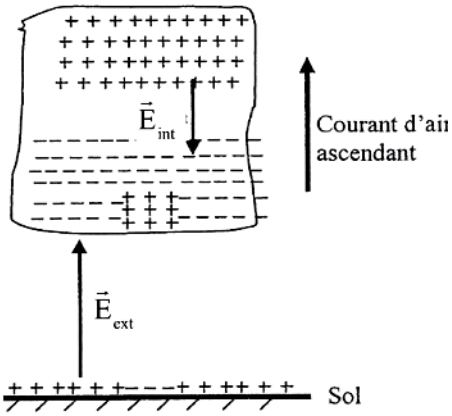

Figure 3 - Dipôles électriques

Les violents courants ascendants provoquent des collisions entre les gouttes d'eau et les microparticules de glace, ce qui produit la création de charges électriques par frottement. Ces microparticules de glace, plus légères et chargées positivement, sont emportées vers le haut par le courant d'air ascendant et occupent ainsi la partie supérieure du nuage qui forme le pôle positif. Tandis que les gouttes d'eau chargées négativement s'établissent dans la partie inférieure et créent le pôle négatif. Cependant, une petite quantité de charges positives demeurent à la base du nuage. Le nuage fait apparaître sur la Terre, par influence électrique, une charge de signe opposé et crée ainsi deux véritables dipôles électriques (figure 3) :

- ▷ Un dipôle interne généré entre les pôles positif et négatif du nuage. Si le champ électrique interne $\overrightarrow{E_{int}}$ devient suffisamment grand, il provoque un claquage interne dans le nuage ;
- ▷ un dipôle externe, généré entre la base du nuage et la surface de la Terre. Si le champ électrique externe $\overrightarrow{E_{ext}}$ atteint des conditions critiques de l'ordre de 20 kV.m^{-1}, il finit par provoquer une grande décharge entre le nuage et la Terre.

A - Le système Terre-atmosphère

On considère que la Terre et son atmosphère constituent les deux armatures d'un condensateur sphérique. L'armature terrestre est chargée négativement, l'atmosphère positivement. Au voisinage du sol, le champ électrique créé est de l'ordre de 102 V.m^{-1}.

1. On suppose conventionnellement que le sol est de potentiel nul. Reproduire la figure 4a sur votre copie et attribuer à chacune des équipotentielles sa valeur en volts, sachant qu'elles sont séparées d'un mètre. Représenter quelques lignes de champ électrique.

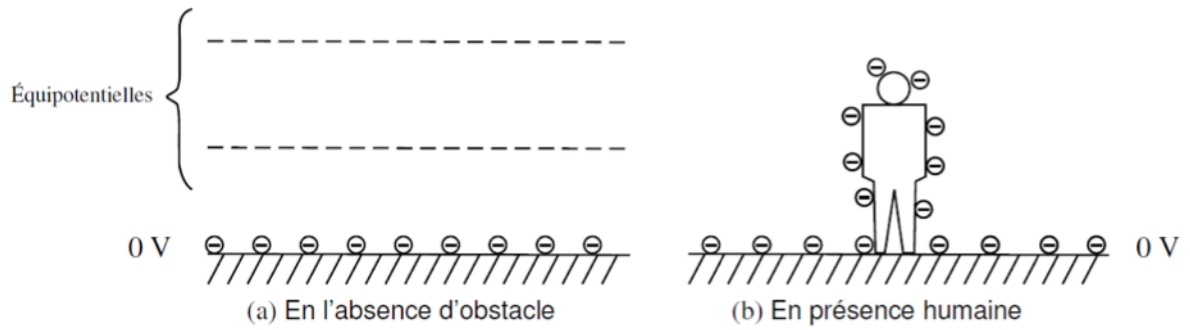

Figure 4 - Déformation des surfaces équipotentielles

2. Reproduire la figure 4b sur votre copie et représenter quelques lignes de champ électrique au voisinage de l'homme. Représenter quelques équipotentielles. L'observation de ces lignes de champ permet-elle de déterminer les zones de faible ou de fort champ électrique ? Justifier. Indiquer alors les zones de fort champ électrique.

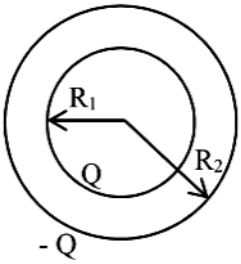

Figure 5 - Condensateur sphérique

On modélise le système Terre-atmosphère par un condensateur sphérique à air (figure 5) formé de deux armatures concentriques de centre O, de rayon R_1 et R_2, avec $R_1 < R_2$.
L'armature intérieure de rayon R_1 porte une charge totale Q uniformément répartie.
L'armature extérieure porte la charge totale $-Q$ uniformément répartie. On travaillera ici dans la base classique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ des coordonnées sphériques.

3. Déterminer la direction et les variables dont dépend le champ $\overrightarrow{E}$ dans l'interarmature.

4. Déterminer le champ $\overrightarrow{E}$ dans l'espace interarmature.

5. Montrer que, sachant que l'on pose $V_1 = V(R_1)$ et $V_2 = V(R_2)$, le potentiel vérifie :

$$V(r) = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{V_1 - V_2}{r} + \frac{R_1 V_1 - R_2 V_2}{R_1 - R_2}$$

6. En déduire la capacité de ce condensateur.

7. En vous appuyant sur le texte fourni en préambule, répondre aux questions suivantes :

(a) Donner une valeur approchée de la capacité du condensateur délimité par l'électrosphère et le globe terrestre.

(b) Quel est l'ordre de grandeur de l'énergie électrique stockée par beau temps dans l'électrosphère ?

(c) Le champ électrique qui règne à la surface de la Terre est-il, en général, dans le même sens ou en sens opposé suivant que le temps est clément ou orageux ?

(d) Lequel de l'éclair ou de la foudre correspond à un claquage diélectrique interne au nuage ? La foudre est-elle toujours descendante ou non ?

(e) Quel est l'ordre de grandeur de la différence de potentiel entre la Terre et le nuage juste avant l'arrivée de la foudre ?

(f) Quel est l'ordre de grandeur de l'énergie véhiculée par un coup de foudre de courant $I = 50000$ A et d'une durée de 10 ms ?

B - Le champ électrique en basse altitude

Dans la basse atmosphère, où se développent les orages, le champ de pesanteur peut être supposé uniforme et noté $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$. L'air est assimilé à un gaz parfait pour lequel on note $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$ le rapport supposé constant entre les capacités thermiques massiques à pression constante et à volume constant. L'atmosphère est en équilibre adiabatique et l'on note $\rho(z)$ et $P(z)$ les masse volumique et pression mesurées à l'altitude z, l'axe des z étant orienté selon la verticale ascendante. Les transformations de l'air dans l'atmosphère sont supposées réversibles.

8. On isole par la pensée un parallélépipède élémentaire d'air, de côtés dx, dy et dz, d'altitude comprise entre z et $z+dz$, que l'on suppose en équilibre. Représenter les forces extérieures verticales agissant sur ce volume infinitésimal. Établir la relation de la statique des fluides $dP = -\rho g dz$.

9. Dans les hypothèses du sujet, trouver une relation vérifiée par P, ρ, P_0 et ρ_0 avec $P(0) = P_0$ et $\rho(0) = \rho_0$.
L'équilibre hydrostatique étant atteint, démontrer que la masse volumique peut se mettre sous la forme :

$$\left(\frac{\rho(z)}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{g\rho_0}{P_0}z$$

10. On admet qu'il y a proportionnalité entre le champ électrique $E(z)$ et la masse volumique $\rho(z)$. Exprimer $E(z)$ en fonction du champ à proximité du sol E_0, de g, γ, R (constante des gaz parfaits), z, de la masse molaire moyenne de l'air M et de la température T_0 au niveau du sol.

Ce champ électrique présent dans la basse atmosphère induit alors une circulation des ions qu'elle contient.

C - Le mouvement des ions

Bien qu'électriquement neutre, l'atmosphère est constituée de nombreux ions, qui vont se déplacer dans le champ électrique. On étudie dans cette question le mouvement d'un cation, de masse m et de charge e, se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{v}$ dans le champ électrique $\overrightarrow{E}$ supposé constant et uniforme.
Le champ magnétique et la pesanteur sont négligés.
Lors de son mouvement, l'ion subit une force de frottement fluide $\overrightarrow{F_f} = -\lambda\overrightarrow{v}$.

11. Établir l'équation différentielle satisfaite par $\overrightarrow{v}$.

12. En supposant la vitesse initiale nulle, établir l'expression de $\overrightarrow{v}$.

13. En déduire les expressions de la vitesse limite du cation $\overrightarrow{v_l}$ et de son temps caractéristique d'établissement τ.

Ce déplacement d'ions va tendre à annuler la différence de potentiel entre la Terre et l'atmosphère. Pour maintenir le déséquilibre entre la charge terrestre et celle de l'atmosphère, il faut donc constamment recharger la Terre négativement. C'est ce que font les orages par le biais de la foudre.

D - La foudre

Lors d'un coup de foudre, l'air est ionisé dans un canal conduisant du sol au nuage orageux. On assimile l'éclair à un fil rectiligne infini, d'axe Oz et de rayon a, parcouru par un courant $I(t)$ uniformément réparti dans une section droite et l'on se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires. Un point M au voisinage de l'éclair sera repéré en représentation cylindrique, par ses coordonnées (r, θ, z).

14. Placer sur un schéma, l'éclair, le point M et la base locale cylindrique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$, on choisira l'axe Oz ascendant.

15. Sachant que l'activité électrique orageuse a pour effet de recharger la Terre négativement, déterminer le sens du courant positif $I(t)$ dans l'éclair.

16. On s'intéresse à l'expression du champ magnétique créé par l'éclair, toujours modélisé par un fil infini de rayon a. Établir l'expression de $\overrightarrow{B}(M,t)$ en tout point de l'espace en fonction des données de l'énoncé.

17. Il n'est pas rare que la foudre s'abatte simultanément sur deux pylônes métalliques voisins. Si ces deux pylônes, supposés parallèles et distants de d_0, sont parcourus par des courants strictement identiques du fait de leur foudroiement, préciser la valeur du champ magnétique produit en un point du plan défini par les deux pylônes, ce point étant situé à égale distance de ceux-ci.

18. En utilisant l'expression de la force de Lorentz, justifier que le canal de l'éclair a tendance à imploser.

La foudre engendre donc des champs magnétiques variables qui peuvent perturber les circuits électriques domestiques, ce qui va faire l'objet de la suite de notre étude.

E - Perturbation des circuits électriques

Un coup de foudre est une décharge électrique caractérisée par des courants de fortes amplitudes et de courtes durées. Lors de la décharge d'un coup de foudre, on a réalisé l'enregistrement de $I(t)$ représenté sur la figure 6. L'intensité maximale est de 30 kA.

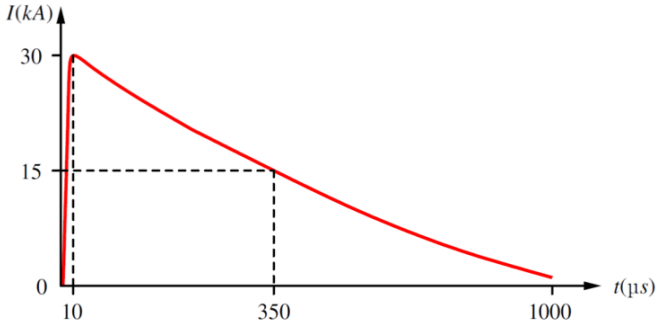

Figure 6 - Enregistrement de l'intensité électrique d'un coup de foudre

19. Rappeler la relation liant la charge à l'intensité d'un courant électrique. À l'aide de la figure 6, estimer la charge totale transportée par l'éclair. Donner l'intensité moyenne du courant transporté par l'éclair.

20. On peut modéliser cette courbe par une équation du type :

$$I(t) = I_0[exp(-\alpha t) - exp(-\beta t)]$$

Déterminer, en fonction de α et β, l'expression du temps de montée t_m de ce signal électrique, c'est-à-dire la durée nécessaire pour qu'il atteigne son maximum.

21. Ce signal est une onde de courant normalisée, de type 10/350. Cela signifie que l'intensité électrique est maximale à la date $t_1 = 10\,\mu$s et qu'à la date $t_2 = 350\,\mu$s, elle a atteint la moitié de sa valeur maximale. À l'aide de ces informations, poser un système de deux équations indépendantes de I_0, que l'on ne cherchera pas à résoudre, permettant d'obtenir les constantes α et β à partir de t_1 et t_2.

On considère le circuit électrique domestique d'alimentation d'une lampe. On l'assimile, pour simplifier, à un cadre rectangulaire de surface $H \times h$, situé à la distance b d'un éclair (voir figure 7a).

On modélise l'éclair par un fil rectiligne vertical infini parcouru par un courant électrique d'intensité $I(t)$. Il produit un champ magnétique d'expression $B(r,t) = K\dfrac{I(t)}{r}$.

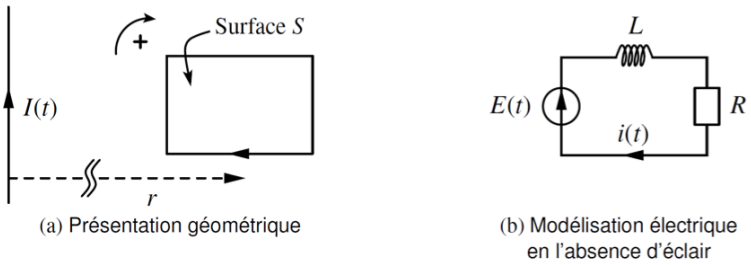

Figure 7 - Perturbation des circuits électriques

Le circuit électrique et l'éclair sont coplanaires.

22. En respectant la convention d'orientation proposée sur la figure 7a, établir l'expression de la force électromotrice e induite dans le cadre par l'éclair en fonction de K, $I(t)$ et des caractéristiques géométriques du problème. Donner les unités de e.

23. Le circuit électrique domestique contient une alimentation alternative de force électromotrice $E(t)$, une bobine d'inductance L et la résistance R associée aux fils et à la lampe (voir figure 7b). Établir l'équation différentielle électrique complète de ce circuit en tenant compte de la perturbation due à l'orage.

24. À quel moment du coup de foudre, enregistré sur la figure 6, la force électromotrice induite est-elle maximale ? Justifier.

II - Observation de la surface terrestre depuis l'espace

Pour observer la surface de la Terre, on utilise depuis plusieurs années des satellites.

A - Mouvements et trajectoires

On s'intéresse au mouvement d'un satellite autour de la Terre, dont la trajectoire est circulaire à une altitude $h = 20000$ km. On considère la Terre et le satellite comme des points matériels de masses respectives $M_T = 6.10^{24}$ kg et $m = 700$ kg. Le mouvement est plan et circulaire, et on repère la position M du satellite en coordonnées polaires, le centre de la Terre étant l'origine O (figure 8 ci-dessous). On donne la valeur de la constante de gravitation : $G = 6,7.10^{-11}$ SI ainsi que le rayon de la Terre : $R_T = 6400$ km.

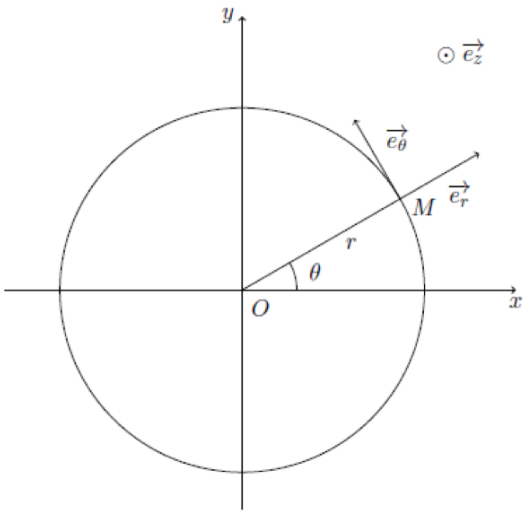

Figure 8 - Repérage en coordonnées polaires dans le plan du mouvement

25. Démontrer que le mouvement est bien plan.

26. Sans démonstration, écrire l'expression de la force vectorielle subie par le satellite dans le repère polaire et calculer la valeur numérique de sa norme. Toujours sans démonstration, donner l'expression du champ de gravitation $\overrightarrow{g}(M)$ créé par la Terre au point M en fonction de m, M_T, h, R_T et G. On pourra utiliser l'aide numérique suivante : $2,6^2 \simeq 6,7$.

27. En considérant la Terre comme sphérique et de masse volumique uniforme, justifier le fait que son champ de gravitation en un point extérieur à la Terre est le même que celui qui aurait été créé par un point matériel situé en son centre affecté de toute la masse de la Terre.

28. En utilisant la deuxième loi de Newton, justifier :

- ▷ la relation $v^2 = \dfrac{GM_T}{r}$, où v est la vitesse du satellite ;
- ▷ que le mouvement circulaire est nécessairement uniforme.

29. En utilisant la question précédente, retrouver la troisième loi de Kepler dans le cas circulaire.

30. Calculer la période de révolution T_{sat} du satellite étudié en secondes.
Comparer cette valeur avec la période d'un satellite géostationnaire.

B - Décalage dû à la traversée de la troposphère

Les informations reçues par le récepteur provenant d'un des différents satellites permettent de déterminer la distance d entre le satellite émetteur et le récepteur via le temps de propagation Δt. Si on considère que la vitesse de propagation du signal est c (vitesse de la lumière dans le vide), alors $d = c\Delta t$. Cependant, le signal traverse l'atmosphère et la vitesse de propagation dans l'air n'est pas exactement égale à $c = 3.10^8$ m.s^{-1}, il y a donc une correction à appliquer. On ne considère dans la suite que les 50 premiers kilomètres d'atmosphère (en partant du sol) que l'on appelle troposphère. On notera L cette longueur. Pour simplifier, on se place dans le cas où le satellite émetteur est à la verticale du récepteur. On choisira l'axe Oz ascendant.

31. En considérant l'air comme un gaz parfait, donner l'expression de sa masse volumique ρ en fonction de M_{air} (masse molaire de l'air), P (pression), R (constante des gaz parfaits) et T (température). On donne $M_{air} = 29$ g.mol^{-1} et $R = 8,3$ SI. Calculer numériquement la masse volumique de l'air au niveau du sol où on prendra $P = P_0 = 1$ bar et $T = T_0 = 270$ K.

32. La loi de Gladstone donne une relation entre l'indice de réfraction n d'un gaz et sa masse volumique ρ, K étant une constante : $n = 1 + K\rho$.

Montrer que, pour un gaz parfait, on peut écrire $n = 1 + K'\dfrac{P}{T}$. On prendra dans la suite $K' = 7,8.10^{-7}$ SI. Quelle est l'unité de K' ?

33. Montrer que l'expression de la pression P en fonction de l'altitude z dans le modèle de l'atmosphère isotherme s'écrit $P = P_0 \exp\left(-\dfrac{z}{H}\right)$ et préciser l'expression de H.

34. On prendra $P(z = 0) = P_0 = 1$ bar, $T = 270$ K et $g = 9,8$ m.s^{-2}. Calculer numériquement H ainsi que la pression à l'altitude de H. Aide numérique : $e^{-1} \simeq 0,37$.

35. On s'intéresse à la variation de l'indice de réfraction n de l'air en fonction de l'altitude z. Montrer que l'on peut écrire, à partir des résultats précédents :

$$n = 1 + \alpha P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

Donner l'expression de α et sa valeur numérique.

36. Montrer que le temps dt pour traverser verticalement une petite épaisseur d'atmosphère dz s'écrit :

$$dt = \frac{1}{c}\left(1 + \alpha P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)\right) dz$$

37. En déduire l'expression littérale du temps Δt nécessaire pour traverser verticalement les $L = 50$ km de la troposphère en fonction de c, L, α, P_0 et H.

38. En déduire le temps de propagation supplémentaire t_{sup} lors de la traversée de la troposphère par rapport à la même distance parcourue dans le vide. Faire l'application numérique. A quelle erreur sur l'estimation de la distance entre le satellite émetteur et le récepteur cela conduit-il ? Aide numérique : $e^{-6,25} \simeq 0,002$.

C - Satellite ENVISAT : mesure de déplacements verticaux par interférométrie radar

Le satellite ENVISAT embarque un radar à synthèse d'ouverture, émettant des ondes radar, permettant de détecter des déplacements verticaux du sol. L'analyse des ondes retour se fait par analogie avec un Michelson où l'un des miroirs aurait des défaut de planéité.
On considère un interféromètre de Michelson dont le schéma simplifié est donné par la figure 9. On admettra que l'ensemble constitué par la séparatrice et la compensatrice se comporte comme une lame séparatrice idéale sans absorption et d'épaisseur nulle, notée S_p. La source S, peu étendue, est monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 633$ nm. Elle est placée dans le plan focal objet d'une lentille convergente de telle sorte que le miroir (M_2) est éclairé sur toute sa surface sous une incidence quasi-normale (figure 9). On recueille les faisceaux émergents sur un écran plan parallèle au miroir (M_1). On notera $\mathcal{E}_0$ l'éclairement maximal de la figure.
Initialement l'interféromètre est réglé en « lame d'air ». (M_1) est parallèle à Ox et (M_2) est parallèle à Oz. Soit (M_2') le symétrique du miroir (M_2) par la séparatrice et e la distance entre (M_1) et (M_2').

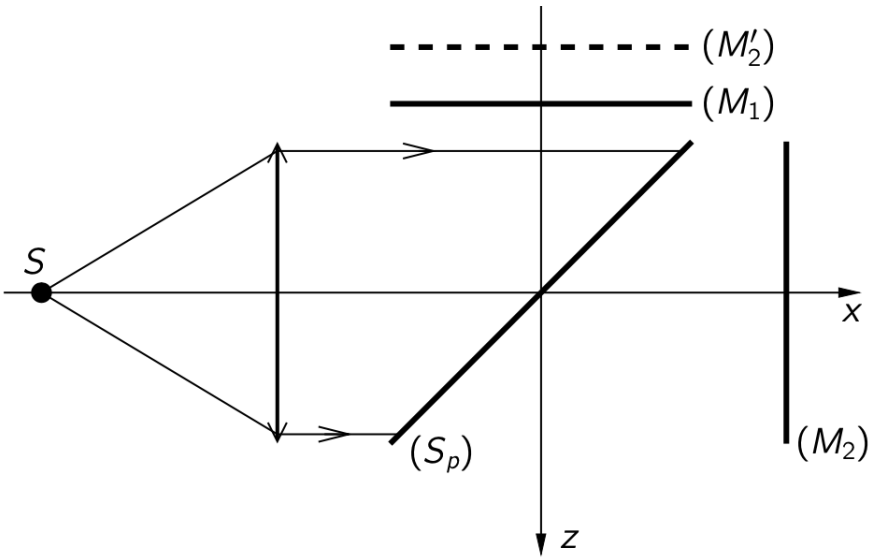

Figure 9 - Schéma de l'interféromètre de Michelson

39. Exprimer l'éclairement $\mathcal{E}$ en fonction de e. Quel est l'aspect de la figure d'interférence pour une distance e donnée ? Comment varie l'éclairement $\mathcal{E}$ si e varie ?

40. Proposer un protocole expérimental pour repérer la position $e = 0$, appelé contact optique.

41. On admet que la condition $e = 0$ est réalisée. On incline alors (M_1) d'un angle α faible : l'interféromètre est réglé en « coin d'air ». Déterminer la figure d'interférences. On précisera en particulier la localisation de la figure d'interférences, la forme de la figure et on déterminera l'expression de l'interfrange i en fonction de λ et α.

Le miroir (M_1) initialement plan s'est déformé et est devenu sphérique. On admettra que le centre de la sphère (M_1), de rayon R, se trouve sur l'axe Oz, qui est donc axe de symétrie de (M_1). Les conditions d'observations sont les mêmes qu'à la question **41.**.

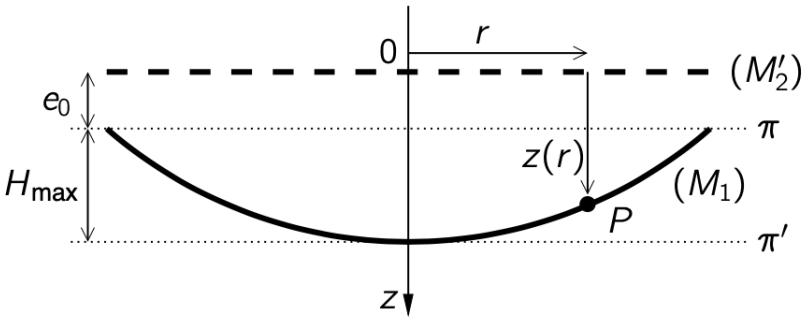

Figure 10 - Cas où (M_1) est sphérique

42. Soit e_0 la distance entre (M_2') et le plan Π correspondant au cas où (M_1) est plan, et H_{max} l'épaisseur maximale du miroir (M_1) une fois courbé. Exprimer l'épaisseur d'air $z(r)$ entre (M_1) et (M_2'), pour un point P de (M_1), en fonction de e_0, H_{max}, r et R (figure 10). On remarquera que les conditions d'observation impliquent les approximations : $r \ll R$, $e_0 \ll R$ et $H_{max} \ll R$.

43. Avec les approximations précédentes, exprimer la différence de marche δ en un point P situé à la distance r de l'axe Oz. Montrer que, dans les mêmes conditions d'observation que les franges du coin d'air, on observe des anneaux localisés au voisinage de (M_1).

44. Déterminer l'ordre p_0 au centre des anneaux en fonction de e_0, H_{max} et λ. On utilise l'indice k pour repérer les anneaux brillants, sachant que $k = 1$ correspond au premier anneau brillant à partir du centre de la figure d'interférences, de rayon ρ_1 sur la surface de localisation. Calculer le rayon ρ_k du kième anneau brillant en fonction de ρ_1, k, λ et R.